象數一原

序

方圓率古不相通也徑求周以勾股術算不易割圓弧矢率又甚疎西人八線妙矣求八線必資六宗三要二簡法非可徑求所以然者方有盡圓無窮勢難强合也自杜氏術出而方圓之率始通其術用連比例一率半徑二率通弦三率倍矢由是遞求諸率有徑即得周有弦矢即得弧有弧亦即得弦矢其算捷其數亦最眞顧是術也梅氏赤水遺珍載焉而未釋明靜庵先生捷法解釋焉而未抉其原當自爲一書非正釋也自董氏術出而方圓率相通之理始顯術

凡四曰求倍分弦矢求析分弦矢審定乘除法以明率數倍分率圜所以通方也析分率方所以通圜也其釋倍分率以方錐堆而方錐堆實出於三角堆弦之二率即兩堆根相并數四率即兩立積相并數矢之三率即兩平積相并數五率即兩三乘積相并數四五率以下多乘積以還莫不如是故遞次乘除皆求堆積法也而即以之求弦矢弦之分有奇無偶矢之分奇偶俱全至析分率則三角堆無其數即假倍分之率較量而反釋之可爲獨具隻眼矣所疑者堆積旣與率數合何以有倍分無析分倍分中弦率又

何以有奇分無偶分且弦矢綫聯於圜中於三角堆何與蓄是疑有年丁酉歸自茗南舟中偶念此恍然曰三角堆數起於一遞加一得堆根遞加根得平積遞加平積得立積蓋遞加數也弦矢率由圜中兩等邊三角挨次比例而生亦起於半徑之一半徑即一率遞加一率得二率遞加二率得三率遞加三率得四率亦遞加數也數有整必有零起整分者曰整數遞加祇一式即三角堆相連兩根積相并與倍分矢率倍分中奇分弦率等數起零分者曰零數遞加有無量式不可以三角堆名依式推衍倍分中偶分弦

率及析分弦矢率實參列其閒不惟若是倍分者一分弧之幾常以一為分母析分者幾分弧之一常以一為分子今得零分則分子母不必定一任設幾分弧之幾無不可求因立此弧求他弧兩術以補所未備又不惟若是分子母既可任設則六十度通弦倍矢與半徑等諸率齊同取為分母任設某度為分子并諸率本數可省去不求但求遞加差數即得逐度分秒之通弦倍矢亦即得逐度分秒之正弦正矢因更立半徑求弦矢兩術以備製表之用似便於用弧約言之弦矢諸率其比例生於兩等邊三角其數本

於遞加兩等邊三角尖象也遞加數尖數也通方圜必以尖故自來割圜術不離勾股而得其象未得其數取數數不無繁重自有零整分遞加而後象與數會分於是定率亦於是通分卽遞加數之根率卽遞加數之積分以子母管乎外圜涵方也率以奇偶應乎內方就圜也割圜術至此始無餘蘊爰乘數月暇著爲圖說二卷友人王子琹逸嗜算術遍涉中西見是術愛之欲與杜董術合刊爲一冊囑余序其大意余因詳術所由不嫌辭費者亦以此通貫方圜之率非董氏理無自彰非杜氏法無自立非勾股割圜等法

以爲導亦無自察象稽數以底於至精然則古人創始之難其可忽哉

道光二十三年癸卯立秋後一日武林項名達識於水心雲意

序

向玩弦矢諸率會得遞加數復析圜得兩等邊三角其象適與數會因草成圖解一冊聊自達意而疎脫甚多丙午冬謝去紫陽講席筆墨就閑漸編定整分半分起度兩種弦矢率而梁楚香中丞復以紫陽大小課藝囑選辭不獲遂又見阻楊緗芸農部在京見舊刻割圜捷術序中言及圖解亟思一見丁未冬來杭見訪因示以所編緗芸謂書未半而君年垂邁是書斷不可不成且不可緩成尅期以一載臨別向諄切致囑余感其意爲之定書名曰象數一原卷一曰

整分起度弦矢率論卷二曰半分起度弦矢率論卷三卷四曰零分起度弦矢率論卷五曰諸術通詮卷六曰諸術明變隨將卷三編定選課畢復阻於病今夏始將卷四著有六紙不料病軀重感濕熱兼肝乘脾幾不可救醫治兩月無起色乃又重感燥火致臟腑無不病者遍體血脉不行醫盡束手自知殘燈微焰斷難久延而是書從此擱筆矣缺而不完世間事大都如是何必戀戀所歎者負細芸諄囑之心耳然書雖未完而零分各腰率零分遞加數卷三中已衍成其式惟義賾緒繁擬分條詳論於卷四業論至易

率法之相當率寄分畢則論用率寄分論定率寄分
皆宜分別奇偶論之而易率法畢次論衍遞加數法
亦論寄分論子母論正負論奇行偶行積子母互異
論直行併行積子母互異而遞加數畢次論遞加數
卽各形腰率而正負不同論心角形腰與腰較率正
負相反論併積卽弦矢率易正負有定法論矢率弦
率子母全半之不同而弦矢率畢末乃依半分起度
式分六術以明其算特彼論全半此論子母異同處
略一分別可也至卷五卷六皆有舊稿且經編定只
須照式錄之今將各卷總爲一束設有本鄙意而續

成者惟條論稍難六術則易於從事無續成者卷四作未完之書亦無不可道光巳酉年十月二十七日

梅侶項名達絶筆序

象數一原目錄

象數一原卷一

錢唐項名達著　　錢唐戴

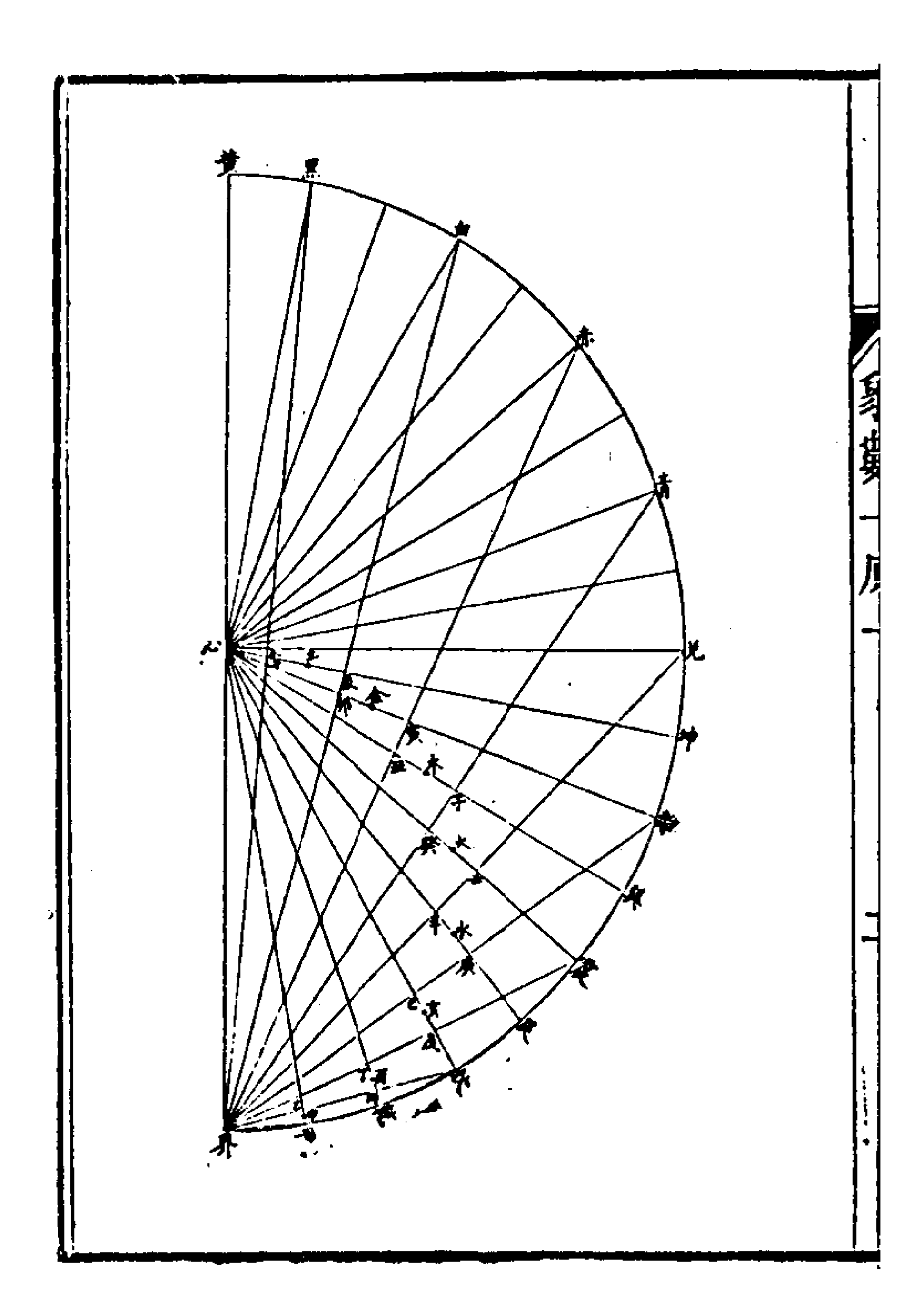
整分起度弦矢率論

弦矢爲割圜要事而求之實難古用勾股分四邊六邊起算以及西人之六宗三要等要皆析圜分以遞求而限於一隅度難任設其取途倘局施算較繁數則得矣而通方徹圜之率終未能抉其原也積思累年乃始知剖圜周界方線自有天然之象數應乎其間象者何兩等邊三角形是此形爲逐分之通弦半徑相割而成一縱一橫邊角交錯而其式常等若析

分愈細則角愈小初分底密切於弧逐分腰皆通於弦矢此天然之象所爲底應圓腰應方也數者何遞加數是此數生於一遞加一得諸根而一卽根差遞加根得平積而根卽平積差遞加平積得立積而平積卽立積差如是以至無盡諸差亦無盡方與圓較皆差也此數早揭以相示若析分愈細則差愈多次層根密合於弧逐層積皆通於弦矢此天然之數所爲根應圓積應方也象數兩相成而其原得於是弦矢可逕求逐分弦矢可互求弦矢與弧可相求而途之局者通矣止用一二術不煩多術止用乘除加減

無事開方而算術之繁者簡矣是知失其原則紆迴難入得其原則徑捷易從方圓象數所由來誠不可不表章而推衍之也

圓分貴平匀析分之整所不待言今別而出之首標整分者因更有零分率在而此整分實爲其先導也零分不易知整分可知其三角形不待尋求但逐分作半徑而於奇分作通弦各形已了然可見矣遞加數亦不造作但本一而遞次加之諸數已燦然畢呈蓋象數之用雖極於變不勝窮而其常焉者則又明示其端而未嘗隱也


心
赤
青
光

如下圖半平圜析爲十八分自心至周各作半徑線自界至一三五等奇分各作通弦線諸線相交成兩等邊三角形凡十有七雖大小不同而皆同式何則心界甲形心乙丙形挨次鱗列漸小至心午未形其心角皆對一分弧必相等界甲乙形界丙丁形挨次鱗列漸大至界辰午形其界角皆對二分弧必相等界角對弧既得心角之倍則心角界角亦必相等凡對弧同者界角恆得心角之半今界角對倍弧故與心角等心界甲形界甲乙形心角界角既等甲角又屬同用角則乙角亦必與心界甲角等凡平三角形三角併之必一百八十度故此形兩角既等彼形餘一角自不得不等界

甲乙形心乙丙形心角界角既等乙角又屬錯交角角既錯交自無不等則丙角亦必與甲角等其餘眾形既挨次而列或同用一角或錯交一角準是推之其三角無不相等角等者式必等又心界甲形兩腰心界及心甲皆半徑其腰等則對腰之甲角界角必自相等即眾形之兩腰及對腰角亦各自相等故皆兩等邊三角形而同式既同式其腰底可以遞相比例

以心界甲為第一形其腰即半徑底即一分通弦以界甲乙為第二形其腰即一分通弦底即一分倍矢設自界作垂線至申垂線即正弦申甲即正矢而申點必居底之半以兩腰等故也申甲既為正矢乙甲

必為倍矢此兩形相比例為心界腰比界甲底若界甲腰與甲乙底是界甲者既為此底復為彼腰遂成連比例三率故以半徑心界為一率一分通弦界甲為二率一分倍矢甲乙為三率三率既全迺可求眾形之腰底各率求第三心乙丙形以第二形底甲乙減第一形腰心甲心甲卽心界得第三形腰心乙為一率一正三率一負心甲卽一率數大為原數甲乙卽三率數小為減數應於原數內減去減數故一率正三率負說詳加減以二率界甲底乘之一率心界腰除之得底乙丙為二率一正四率一負乘除後原數不動者以乘法除法皆祇一位又祇一數也遞降一率者以乘法較除法降一率也說詳乘除次求第四界丙丁

形以第三形底乙丙加第二形腰界乙界乙卽界甲得第四形腰界丙爲二率二正四率一負加法同名相加今兩二率皆正故相加得二以二率乘之一率除之得底丙丁爲三率二正五率一負以第四形底丙丁減第三形腰心丙得第五形腰心丁爲一率一正三率三負五率一正減法異名相加無對者原數仍其名減數易其名今心丙爲原數丙丁爲減數故一率仍爲正三率異名相加得三從原數爲負五率屬減數易負爲正以二率乘之一率除之得底丁戊爲二率一正四率三負六率一正以次遞求衆形

約法曰以現得界角形底減先得心角形腰得次後心角形腰乘除而得底以現得心角形底加先得界

角形腰得次後界角形腰乘除而得底凡應減者恆異名應加者恆同名故皆用加法乘除恆遞降一率如法列式於左煦按註云說詳乘除說詳加減而說未有顧其義已散見書中茲不復補

遞求整分起度各形腰底率

第一形腰心界半徑|

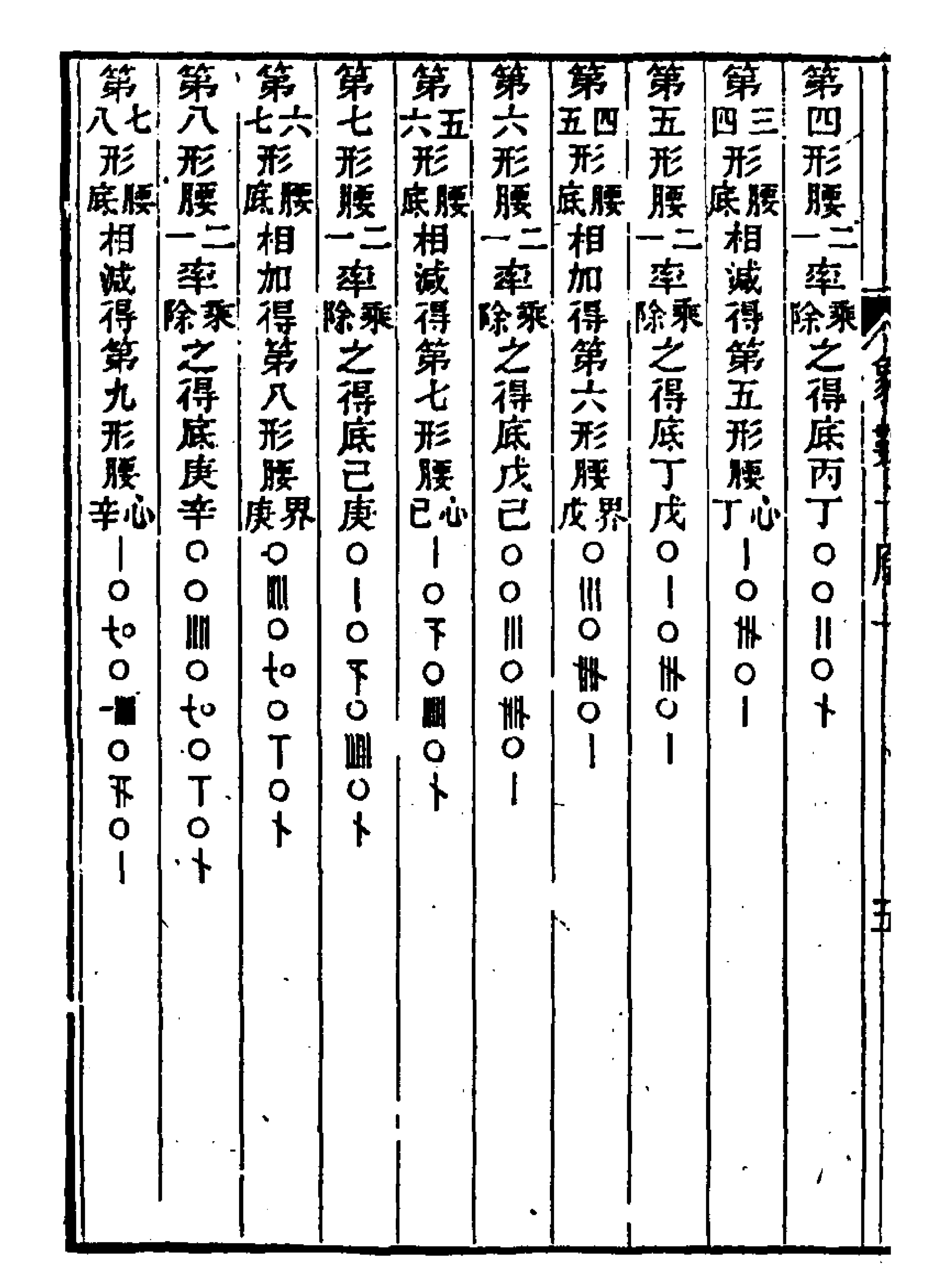
第一二形底腰界甲通弦○|

第二形底甲乙倍矢○○|

第一二形腰底相減得第三形腰心乙|○卜

第三一形腰二率乘除之得底乙丙○|○卜

第二三形腰底相加得第四形腰界丙○||○卜



第四形腰二率乘一率除之得底丙丁 〇〇‖〇十

第三形腰第四形底相減得第五形腰丁心 ｜〇卌〇｜

第五形腰二率乘一率除之得底丁戊 〇｜〇卌〇｜

第四形腰第五形底相加得第六形腰戊界 〇|||〇卌〇｜

第六形腰二率乘一率除之得底戊己 〇〇|||〇卌〇｜

第五形腰第六形底相減得第七形腰己心 ｜〇丅〇||||〇⊥

第七形腰二率乘一率除之得底己庚 〇｜〇丅〇||||〇⊥

第六形腰第七形底相加得第八形腰庚界 〇||||〇七〇丅〇⊥

第八形腰二率乘一率除之得底庚辛 〇〇||||〇七〇丅〇⊥

第七形腰第八形底相減得第九形腰辛心 ｜〇七〇||||〇丌〇｜

第九形腰二一率乘除之得底辛壬 ○丨○[illegible]○[illegible]○[illegible]○丨

第八九形腰底相加得第十形腰界壬 ○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○丨

第十形腰二一率乘除之得底壬癸 ○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○丨

第九十形腰底相減得十一形腰心癸 丨○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

十一形腰二一率乘除之得底癸子 ○丨○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

第十十一形腰底相加得十二形腰界子 ○丅○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

十二形腰二一率乘除之得底子丑 ○○丅○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

十一十二形腰底相減得十三形腰心丑 丨○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○丨

十三形腰二一率乘除之得底丑寅 ○丨○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○丨

十二十三形腰底相加得十四形腰界寅 ○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○丨

十四形腰二率乘一率除之得底寅卯〇〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇𝍠

十三形腰十四形底相減得十五形腰心卯𝍠〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]

十五形腰二率乘一率除之得底卯辰〇𝍠〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]

十四形腰十五形底相加得十六形腰辰界〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]

十六形腰二率乘一率除之得底辰午〇〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]

十五形腰十六形底相減得十七形腰午心𝍠〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇𝍠

十七形腰二率乘一率除之得底午未〇𝍠〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇𝍠

十六形腰十七形底相加得十八形腰未界〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇𝍠

既得衆形腰底率迺求逐分弦矢率求三分通弦以

第二形腰界乙倍之加第三形底乙丙即界坎三分

通弦丙坎卽界乙亦卽界甲推之戊震卽界丁亦卽界丙庚離卽界巳亦卽界戊均爲各界角形腰亦可以第二形腰界乙二率一正與第四形腰界丙二率二正四率一負相加得界坎二率三正四率一負爲三分通弦界丙與坎乙等求三分倍矢以第三形腰與半徑較得丙乾倍之加第四形底丙丁得酉乾之倍卽三分倍矢設自界作垂綫至酉則酉乾卽正矢酉點居丁丙底之半酉丙加丙乾爲正矢則丁丙加丙乾之倍必爲倍矢下可類推又丙乾卽乙甲推之戊坎卽丁乾庚艮卽巳坎均爲各心角形腰與半徑之較亦可以第三形腰較卽腰與半徑之較也省曰腰較丙乾三率一正與第五形腰較丁乾三率三正五率一負第五形腰本爲一率一正三率三負五率一正今與半徑一率相減半徑爲原數一率同名相減適盡餘率無

對皆屬減數故易其正負相加得酉乾之倍三率四正五率一負

爲二分倍矢以次遞求逐分約法曰以界角相連兩

形之腰遞相加得逐分通弦以心角相連兩形之腰

較遞相加得逐分倍矢求腰較取前所得各心角形

腰率減去一率餘率易其正負如法列式於左

逐分通弦率

第二形腰甲界一分通弦|

第二四形腰相加得坎界三分通弦|||〇卜

第四六形腰相加得震界五分通弦||||〇卌〇|

第六八形腰相加得離界七分通弦π〇-卌〇π〇卜

第八十形腰相加得兌界九分通弦[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇〡

第十十二形腰相加得青界十一分通弦[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇卜

十二四形腰相加得赤界十三分通弦[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇〡

十四六形腰相加得白界十五分通弦[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇卜

十六八形腰相加得黑界十七分通弦[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇〡

逐分倍矢率

第三形腰較申甲之倍一分倍矢〡

第三五形腰較相加得酉乾之倍二分倍矢[illegible]〇卜

第五七形腰較相加得亥坎之倍三分倍矢[illegible]〇[illegible]〇〡

第七九形腰較相加得水艮之倍四分倍矢[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇卜

第九十一形腰較相加得之倍火震 五分倍矢[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]

十一十三形腰較相加得之倍木巽 六分倍矢[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]

十三十五形腰較相加得之倍金離 七分倍矢[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]

十五十七形腰較相加得之倍土坤 八分倍矢[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]〇[illegible]

煦案是書原本係　先生算草未經點定者故算式尚循俗間所用今悉改從元人細草一竪十橫之例

按此弦矢諸率雖多寡錯出要之一遞加數耳弦率由界角形兩腰相加而得矢率由心角形兩腰較相加而得腰底率雖備用乘除加減而乘除祇降一率

原數不動應減者皆屬異名相加約其所用無非加法且腰底每遞相生取第一形底加第三形底得第四形腰又加第五形底得第六形腰又加第七形底得第八形腰是界角形腰生於心角形底取第二形底加第四形底得第五形腰較又加第六形底得第七形腰較又加第八形底得第九形腰較是心角形腰又生於界角形底而其加底得腰也迺重疊相加實與遞加數等今就遞加數以明腰底之遞生諸率隨之而衍絕不待安排造作而自然羅列燦陳腰底諸率明弦矢率不煩言而解矣

遞加圖

此遞加圖每降一層則增一位逐層之位開列層遞加位亦遞加即其數因之遞加計逐層總數自上而下遞加一倍併次層一一得二為首層一之倍并三層一二一得四為次層二之倍下可類

推計逐層各數左一右一常不動中間諸位併上層兩數爲下層一數如第三層中位數二爲次層一一併數第四層中位數左右各三爲第三層一二及二一併數第五層中位數左右各四爲第四層一三及三一併數最中一位六爲第四層三三併數以下可推亦可兩其上層各數差一位疊而併之成下層各數如第三層一二一爲原數復以一二一爲加數相差一位併之首位原數一無加數仍爲一次位原數二加數一併得三第三位原數一加數二併得三末位加數一無原數仍爲一是卽第四層各數以下可推此皆按層而計也顧是圖之式本如三角形逐層皆是底作底線聯之自右上而左下斜列諸行皆左腰作線聯爲左線自左上而右下斜列諸行皆右腰作線聯爲右線左線第一行起一本是一而

衍之則有多一命曰根差第二行亦起一遞加首行
根差之一成二三四五等數命曰根第三行亦起一
遞加第二行之二三四五成三六十十五等數命曰
平積第四行亦起一遞加第三行之三六十十五成
四十二十三十五等數命曰立積推之三乘積乃至
多乘積均依是遞加可至無盡左右諸數復兩兩相
當而等由是左線所聯者根歸根積歸積右線所聯
者則爲同根之各積此遞加本法也
是圖祇一遞加法極整齊平易而包蘊正自無窮且
畧言之如八卦原於一畫首層爲太極祇一次層爲

兩儀陽一陰一第三層爲四象太陽一太陰一少陽
少陰共二第四層爲八卦乾一坤一震坎艮一陽二
陰卦三巽離兌一陰二陽卦三第五層爲四畫卦純
陽一純陰一一陽三陰卦四一陰三陽卦四二陽二
陰卦六以下多畫卦本此可推又如萬象不外乎點
線面體左線第二行一二三四等數爲點數一點爲
點二點成線三點成面四點成體四以下爲多乘體
點數第三行一三六十等爲線數一線爲線三線成
面六線成體六以下爲多乘體線數第四行一四十
二十等爲面數一面爲面四面成體四以下爲多乘

體面數推之第五行爲體數下至多乘體數可以意知多乘體無其形而數則未嘗不具然此數卽古之廉率也廉率分層如卦畫首層一方隅未分次層下左一爲方右一爲隅其中則逐層遞加第三層爲平方廉方隅相乘者二第四層爲立方廉方自乘乘隅者三隅自乘乘方者三第五層爲三乘方廉方再乘乘隅者四方自乘乘隅自乘者六隅再乘乘方者四四乘以下及多乘方本此可推又此數卽古之三角堆也三角堆分行如點線等右線第一行根一則各堆積皆一第二行根二則平堆積三立堆積四三乘

堆積五第三行根三則平堆積六立堆積十三乘堆積十五第四行根四則平堆積十立堆積二十三乘堆積三十五第五行根五及四乘堆積以下本此可推是皆準底及左右腰三線分層分行而計今按此三線在在聯諸數成等邊三角形若自各形右角作線與左線相交成直角角歷剖三角形爲兩勾股此剖線之聯諸數也間空一位而間增一行於是前圖心角界角形各腰率遂聯爲一線奇偶行亦因此而分第一行爲第一形腰一率一正即半徑第二行爲第二形腰二率一正即一分通弦第三行爲第三形腰

一率一正三率一負卽半徑減一分倍矢第四行爲第四形腰二率二正四率一負第五行爲第五形腰一率一正三率三負五率一正以下可推是遞加數又與圜內兩等邊三角形形腰率相應也

腰率應遞加數何也曰如一率卽第一形腰以下衆心角形腰其一率亦皆一乘除得底降爲二率卽其底內二率亦皆一如根差之數皆爲一也

二率起於第一形底如上論心角形各底內二率旣皆爲一若取第一形以下各底遞加成界角形腰則二率必隨之遞加一加一得二二加一得三三加一

得四是爲界角第二形下各腰內二率乘除得底降爲三率卽其底內三率亦爲一二三四等如根之一二三四等數由遞加根差而得也

三率起於第二形底如上論界角形各底內三率旣爲一二三四等數若取各底遞加成心角形各腰則三率必轉而相加一加二得三三加三得六六加四得十是爲心角第三形下各腰內三率乘除得底降爲四率卽其底內四率亦爲一三六十如平積之一三六十等數由遞加根而得也

四率起於第三形底如上論心角形各底內四率旣

爲一三六十等數若取各底遞加爲界角形各腰則四率必隨之遞加一加三得四四加六得十十加十得二十是爲界角第四形下各腰內四率乘除得底降爲五率即其底內五率亦爲一四十二十如立積之一四十二十等數由遞加平積而得也

五率以下可推此腰底率所以即遞加數也惟前圖根積斜列諸率線錯交其間視難明晰今以根線積線平列爲層諸率線直列爲行廉積線斜右堆積線斜左爲斜行覺層別行分諸率亦備又倍矢率不用心角形腰而用腰較則一率根差可省另圖於左

遞加圖

第二形腰
第三形腰較
第四形腰
第五形腰較
第六形腰
第七形腰較
第八形腰
第九形腰較
第十形腰
第十一形腰較
第十二形腰
第十三形腰較

根	二率	一	二	三	四	五	六
平積	三率	一	三	六	十	十五	二十一
立積	四率	一	四	十	二十	三十五	
三乘積	五率	一	五	十五	三十五	七十	
四乘積	六率	一	六	二十一	五十六		
五乘積	七率	一	七	二十八	八十四		
六乘積	八率	一	八	三十六			
七乘積	九率	一	九	四十五			
八乘積	十率	一	十				
九乘積	十一率	一	十一				
十乘積	十二率	一					
十一乘積	十三率	一					

此圖根一層平列於上每行直下積即腰率及腰較率腰起二率以下率皆偶腰較起三率以下率皆奇遞併相並兩行之偶率即倍分弦率遞併相並兩行之奇率即倍分矢率欲求率數須明遞加數以根求積法有斜行積有直行積有兩直行併積宜分別求之

論遞加數以根求積法

遞加數各積由諸根遞加而得故求積之乘除法皆用根一層數遞以根層相連兩數相乘二除之得平積一層數遞以相連三數相乘二除三除之得立積

一層數遞以相連四數相乘二除三除四除之得三乘積一層數如是依次遞乘遞除得多乘各積數每增一數乘即增一數除所得者即增一乘之積然求積必先定根此相連幾數有根在右遞取左位數爲乘法而得各積者其積爲自根斜左一行綫所聯有根在左遞取右位數爲乘法而得各積者其積爲自根斜右一行綫所聯有根在中遞取左右兩位數相乘爲乘法而閒層得積者其積爲自根直下一行綫所聯根在右如三角堆求積是法以根加一乘根二除之得平三角堆根加二乘平堆三除之得立三角

堆根加三乘立堆四除之得三乘三角堆本宜以根加一乘根根加二再乘二除三除之得立堆而根加一乘根二除之與求平堆同既得平堆可對去不用故逕以根加二乘平堆也凡乘除法同者可先乘後除亦可先除後乘立堆下仿此依次遞求可得多乘三角堆皆在斜左一線上根在左如諸乘方求廉是法以根爲第一廉視所乘方屬幾乘加一數命爲根根減一乘第一廉二除之得第二廉根減二乘第二廉三除之得第三廉根減三乘第三廉四除之得第四廉依次遞求可得多乘方各廉皆在斜右一線上根在中應分兩種有根當中一數者如界角形求腰率是法以中一數爲根視形數爲第幾折半卽根數卽爲二率根加一減一

得兩數相乘以乘二率二除之三除之得四率此求直行積也係間層越求故須兩乘兩除乘法用根加一得數必移而左又用根減一得數復移而右左右兩抵故得直行積根加二減二得兩數相乘以乘四率四除之五除之得六率根加三減三得兩數相乘以乘六率六除之七除之得八率依次遞求可得各腰率有根當中二數間者如心角形求腰較率是法以中二數相併爲倍根根居兩數間宜併兩數折半爲根折半則零故不折而用倍倍根數與形數等倍根加一減一得兩數相乘四除之二除之得三率倍根加三減三得兩數相乘以乘三率四除之三除之四除之得五率倍根加五減五得兩數相乘以乘

五率四除之五除之六除之得七率根數零加減數亦必零本宜以根加減半數得左右並位兩數加減一數半得隔二位兩數加減二數半得隔四位兩數今根用倍加減數亦宜倍故倍其半爲一倍其一數半爲三倍其二數半爲五以之加減倍根必得各兩數之倍相乘後增爲四倍乘法既增四倍除法亦宜增四除也依次遞求可得各腰較率而皆在直下一線上遞加數以根求積大要不越此數

種今再爲兩等邊三角求率更定其法

界角形求腰率法曰形數折半爲根即爲二率根自乘減一以乘二率二除之三除之得四率根自乘減四以乘四率四除之五除之得六率根自乘減九以乘六率六除之七除之得八率二率爲正四率爲負

以下皆正負相間凡乘法恆以一二三四等數自乘之與根自乘相減若相減適盡則已得末率不必再求（根之左右隔一位隔三位隔五位各兩數相乘本爲遞次乘法而各兩數之和常與倍根等是根其半和也若其較則隔一位兩數相減得二而一爲半較隔三位兩數相減得四而二爲半較隔五位兩數相減得六而三爲半較凡半和自乘內減半較自乘與大小兩數相乘等故以半和根自乘內減半較自乘一四九等數與遞取左右兩數相乘等也）

心角形求腰較率法曰形數爲倍根倍根自乘減一四除之二除之爲三率倍根自乘減九以乘三率四除之三除之四除之得五率倍根自乘減二十五以乘五率四除之五除之六除之得七率三率爲正五

率爲負以下皆正負相閒凡乘法恒以一三五七等數自乘之與倍根自乘相減若相減適盡則巳得末率不必再求根居兩數閒其左右並位或隔二位隔四位各兩數相乘本爲遞次乘法而各兩數相併常與倍根等是倍根其和也若其較則左右並位者其較一隔二位者其較三隔四位者其較五和自乘內減較自乘四除之與大小兩數相乘等故卽以和之倍根自乘內減較自乘一九二十五等數而增一四除與遞取左右兩數相乘等也

以上所論雖根積有異要皆遞求一位積也若求兩位併積宜就本法變通之遞取根層相連兩位數併之爲併根遞取相連三位數以左右兩位數相併中位一數乘之二除之爲併平積如前法宜以中位數乘右位數二除之得

右位平積中位數乘左位數二除之得左位平積乃併之爲併平積既同以中位數爲乘法又同二除則先併後乘除與先乘除而後併一也遞取相連四位數以最左右位兩數相併中間並位兩數相乘以乘之二除之三除之爲併立積如前法宜以中間並位兩數相乘以乘右位數二三遞除之得右位立積中間並位兩數相乘以乘左位數二三遞除之得左位立積乃併之爲併立積既同以並位兩數相乘爲乘法又同用二三除則先併後乘除與先乘除而後併一也下仿此遞取相連五位數以最左右位兩數相併中位一數乘之隔一位兩數相乘再乘之二除之三除之四除之爲併三乘積遞取相連六位數以最左右位兩數相併中間並位兩數相乘以乘之隔二位兩數相乘再乘之二除之三除之

四除之五除之爲併四乘積下至多乘併積可以類推然今所求者爲兩直行併積宜定根求之併積雖似無根而實有根在根居兩行閒須辨行之奇偶偶率兩行爲偶行奇率兩行爲奇行兩偶行根層有數兩行閒之奇行反無數故即併偶行兩根數爲倍根亦即爲併根求併立積宜取四數併左右位兩數爲實中閒並位兩數相乘以乘之二三遞除之而左右數併仍與倍根等並位兩數又即倍根加一減一折半之數（並位兩數其較一其和即倍根和較相加減各折半即得兩數）故以倍根加一減一相乘以乘併根（即倍根）四除之二除之三除之

為併立積（倍根加一減一為兩數之倍相乘後增為四倍故宜增四除）求併四乘積宜取六數併左右位兩數為實中間並位兩數相乘隔二位兩數相乘遞乘之二三四五遞除之而左右數併仍與倍根等並位兩數相乘乘併根二三遞除與求併立積同既得併立積可對去不用隔二位兩數又即倍根加三減三折半之數故以倍根加三減三相乘以乘併立積四除之四除之五除之為併四乘積以此遞推無論左右隔幾位兩數併之皆與倍根等是倍根為和其較則以一三五七等數遞加而多和較相加減常得各兩數之倍故相乘以乘前

積每次宜增四除也兩奇行根層無數兩行間之偶行反有數故即用偶行根數爲根求併平積宜取三數併左右位兩數爲實中位一數乘之二除之而中數即根左右數併又與倍根等故逕以根自乘爲併平積根自乘與根乘倍根二除之等求併三乘積宜取五數併左右位兩數爲實中位一數乘之隔一位兩數相乘再乘之二三四遞除之而左右數併仍與倍根等中數乘倍根二除之與求併平積同既得併平積可對去不用隔一位兩數又即根加一減一之數隔一位兩數半較爲一半和即根故以根加一減一相乘以乘併平積三除之四

除之爲併三乘積求併五乘積宜取七數併左右位兩數爲實中位一數乘之隔一位兩數相乘隔三位兩數相乘遞乘之二三四五六遞除之而左右數併仍與倍根等中數及隔一位兩數遞乘倍根二三四遞除與求併三乘積同既得併三乘積可對去不用隔三位兩數又即根加二減二之數故以根加二減二相乘以乘併三乘積五除之六除之爲併五乘積以此遞推無論左右隔幾位兩數併而折半皆與根等是根爲半和其半較則以一二三四等數遞加而多半和半較相加減即得各兩數故相乘以乘前積

每次不增四除也依是乘除併積可得卽倍分弦矢率無不可得通弦弧分與倍根相當倍矢弧分與根相當通弦率卽兩偶行併根併積倍矢率卽兩奇行併積今再爲弦矢求率更定其法

求倍分通弦率法曰以弧分爲二率弧分自乘減一乘二率四除之二三遞除之爲四率弧分自乘減九乘四率四除之四五遞除之爲六率弧分自乘減二十五乘六率四除之六七遞除之爲八率依次遞求凡乘法以一三五七九等數自乘與弧分自乘相減至相減適盡已得末率不必再求二率正四率負以

下皆正負相間求併積法本宜以並位隔二位隔四位各兩數相乘爲乘法今弦分常爲兩數和一三五七等數遞爲兩數較和方減較方四除之與兩數相乘等故用爲乘法也

求倍分倍矢率法曰以弧分自乘爲三率弧分自乘減一乘三率三除之四除之爲五率弧分自乘減四乘五率五除之六除之爲七率弧分自乘減九乘七率七除之八除之爲九率依次遞求凡乘法以一二三四五等數自乘與弧分自乘相減至相減適盡巳得末率不必再求三率正五率負以下皆正負相間本宜以隔一位隔三位隔五位各兩數相乘爲乘法今弦分常爲兩數之半和一二三四等數遞爲兩數之半較半和方減半較方與兩數相乘等故用爲乘法也

此二法所求諸率迺諸率用數尙非諸率本數本數由本度而生本度者今所知度也半徑爲一率本度通弦爲二率本度倍矢爲三率按連比例可得諸率故每次求率必先三率乘一率除得諸率本數復依是法乘除之得諸率用數而後正負相加減卽得倍度弦矢然本是立術弦矢率祇有倍分無析分倍分中弦率亦祇有奇分無偶分此第屬圜中整分起度弦矢率其理猶有遺其數亦未備故其術局而不能賅今必備詳其乘除併減者亦以整分實零分之根整分之術明零分術乃從此可衍也

終

錢唐項名達著

錢唐戴　煦校

半分起度弦矢率論

數未有奇而不偶者而弦率則有奇分無偶分心竊疑之因研玩遞加圖見其奇行間偶行而列對根層適當其半默有會於用半之理恍然曰半者零五也弦率之得奇不得偶由於用全不用半知整不知零也於是以半分起根遞加全分如整分法本根求積別衍成遞加一圖復以半分起度遞加全分亦如整分法按度出線別聯成各種兩等邊三角三角形既

得迺用率法乘除求得逐形腰底而偶分弦率各帶半分之矢率均出其閒考其數則與半分起根遞加數等然則非遞加一圖且不知弧度之可起半分奚自而按其形覈其數哉今故先論遞加數以發其所藏後詳弦矢率以證其所合

數之有零整也非整無以立其常非零無以通其變半者零之始遞加圖揭整數以示人而其半數之中藏者特人不覺耳夫弦矢率爲直行線所聯聯偶率之線抵根層得整數聯奇率之線抵根層在兩數閒而當其半折半用零之理已微露其端矣故根起一

數遞加一得二三四五等是謂整根顯列之數也根起半數遞加一得一數半二數半等是謂零根隱含之數也有零根必有零積在根則間增一位旣以零而補整在積則間空一位實以整而待零但如求整積法求得零積整積以偶率對整根奇率對零根零積必以偶率對零根奇率對整根偶率弦也奇率矢也整根一線上偶率整奇率零整偶率可爲弦零奇率何不可爲矢零根一線上奇率整偶率零整奇率可爲矢零偶率何不可爲弦且弦矢之偶寄於積弦矢之分定於根併兩整根其分奇一與二併爲三二與三併爲五皆奇

數而半之得零分三折半爲一分半五折半爲二分半卽零根在弧爲零分併兩零根其分偶一分半二分半併得四二分半三分半併得六皆偶數而半之得整分四折半爲二六折半爲三皆整根在弧爲整分弦分得併根之全矢分得併根之半故整偶率併爲弦其弧分與併整根等而得一三五等奇分則零偶率併亦爲弦其弧分與併零根等必得二四六等偶分矣整奇率併爲矢其弧分與併零根之半等而得一二三等整分則零奇率併亦爲矢其弧分與併整根之半等必得一分半二分半等零分矣設取整而遺零不惟弦分不全并不識矢之有零分抑知一整一零一奇一偶或合整

得奇而合零得耦或半耦得整而半奇得零實備於遞加一圖而留其位以相示玩圖者觀其會通可也作半分起根遞加圖與整分異者大端有三一曰數別正負整分根積皆正半分則以反減不盡之故兼有負根負積乘除加減宜如法以定其名二曰位分內外整分逐行之位至各首積而止半分因有負積故溢首積外首積之上爲內位積皆正下爲外位負正相間以至無盡三曰分列母子整分所列皆實數半分則宜列分子而寄分母位愈降所寄之分亦愈多今準是作圖以明其法於後

半分起根遞加圖右半

分母　二乘　四乘　六乘　八乘　十乘　十二乘　十四乘　十六乘　十八乘　廿乘　廿二乘　廿四乘　廿六乘

半分起根遞加圖左半

煦案是圖原合爲一但有算式不加外圈與前整分圖互異應加外圈以歸一例旣加外圈則幅狹行多不得不分圖爲二今以居中第一行領諸正行爲左半又重列居中行領諸負行爲右半其分母仍寄右半之右若將兩第一行合併爲一卽成總圖又書中算式今悉從一竪十横之例凡自一至九作𝍠𝍡𝍢𝍣𝍤𝍥𝍦𝍧𝍨百與萬與百萬同此式自一十至九十作𝍩𝍪𝍫𝍬𝍭𝍮𝍯𝍰𝍱千與十萬與千萬同此式凡爲負數則尾位加斜畫以別之

如圖第一層根差皆一第二層爲根取二之一爲首根寄其分母用其分子首根即爲一書寄分母於右方以分母乘根差得二（首根一爲分子根差一乃實數故以分母通之）自首根向左順加得三五七九等諸正根又自首根向右逆減則反減而得負根一由是恆與根差異名應以加爲減亦得三五七九等諸負根次求各首積依整分法宜以次根乘首根二除得首平積三根乘首平積三除得首立積四根乘首立積四除得首三乘積今諸根皆分子每乘後應遞以分母除之而分母恆除實不盡又除法中二四六八等偶數皆內含分母

亦恆除實不盡故所求積愈降寄分亦愈增而多如次根三乘首根一仍得三二除之分母除之均不受除卽以三爲首平積書寄分母再乘於右方首根本寄分母今不受二除分母除故轉以遞乘寄分得分母再乘以三根五乘平積三得十五三除之得五分母除之不受除卽以五爲首立積書寄分母三乘於右方平積本寄分母再乘今又不受分母除故增爲三乘以四根七乘立積五得三十五四除之分母除之均不受除卽以三十五爲首三乘積書寄分母六乘於右方立積本寄分母三乘今又不受四除及分母除故轉以乘寄分增爲六乘以五根九乘三乘積三十五得三百十五五除之得六十三分母

除之不受除即以六十三爲首四乘積書寄分母七乘於右方增寄一乘法亦同上以六根十一乘四乘積六十三得六百九十三六除之分母除之均不受除六六中有三迺三除之得積二百三十一應增寄分母及二除總爲寄分九乘又視前三乘積較平積寄分增四乘今五乘積較三乘積祇增三乘故更增寄分使齊其等轉以分母乘積得四百六十二爲首五乘積書寄分母十乘於右方凡平積三乘積五乘積均屬奇行立積四乘積六乘積均屬偶行每行上下位寄分宜使齊其等差以下各首積可準此遞求次求逐位積平積寄分較根多一四除迺四乘次根三以加首

平積得十五爲次位平積復四乘三根五以加之得三十五爲三位平積如是順加而左得逐位平積皆正又四乘首根一以減首位平積餘一減數大易正爲負爲首位外平積復四乘負根一以減之餘三減數大易負爲正爲次位外平積復四乘負根三以減之異名以加爲減得十五從本數爲正爲三位外平積如是逆減而右得逐位外平積立積寄分較平積多一二除迺二乘次位平積以加首立積得三十五爲次位立積復二乘三位平積以加之得一百零五爲三位立積如是順加而左得逐位立積皆正又二

乘首位平積以減首位立積餘十一減數大易正爲負爲首位外立積復二乘首位外平積以減之餘一減數大易負爲正爲次位外立積復二乘次位外平積以減之餘五減數大易正爲負爲三位外立積如是逆減而右得逐位外立積三乘積以下準此遞求大約求各首積每增一乘除即得增一乘之積而分母亦增寄一乘遇二四六八十等數爲除法皆不受除宜按數更增其寄分遇六則三除之寄其二除遇十則五除之寄其二除遇十二則三除之寄其四除每奇乘積下位較上位分母增寄四乘偶乘積亦然至

求逐位積順而左則相加逆而右則相減以本層為本數以上層為加減數減法同名則減異名以加為減加則名從本數減則本數大名從本數減數大名從減數正負兩根間居中直下為第一行自此而左首正根一行為第二挨次為第三第四等諸正行自此而右首負根一行為第二挨次為第三第四等諸負行根積數左右方兩兩相等惟正負不等而亦有定率左方自首根首積之上位積皆正其下位直下皆一負一正相間右方根一層常負以下逐層一正一負相間平列向左遇各首積則斜折而下其斜行

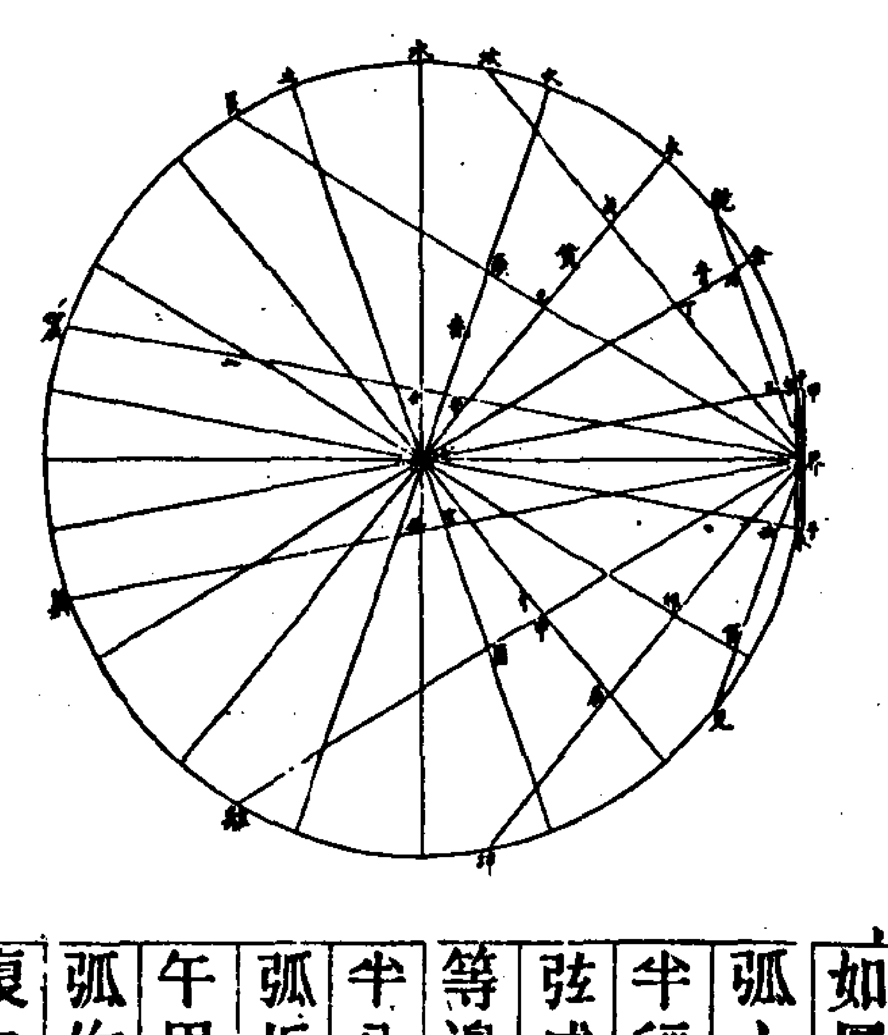
亦一負之正相間凡根積之負者作斜畫記之今左右方各求至十一行止每行各求至八位止已足知其大槩是爲半分起根遞加圖

是圖既非廉率亦不成三角堆所與相應者惟弦矢率數葢弦矢率祇是遞加法整分遞加既與整弧起度之弦矢率應半分遞加亦必與半弧起度之弦矢率應故根差當一率根當二率平積當三率立積當四率奇行積卽各心角形腰率也矢率本之偶行積卽各界角形腰率也弦率本之一切皆與整分一遞加數雖與弦矢率相應而正負實不同整分者遞

加數常正弦矢率常一正一負相閒例有一定故正負無煩細辨若半分者遞加根積及弦矢率各有正負多寡異同又復不等不定其例則易於混淆今約定之求弦以偶行根當二率求矢以奇行平積當三率皆常正餘則偶行以積之乘數折半奇行以乘數減一折半視得數偶者仍其正負奇者易其正負至界角形腰正負與弦率同心角形腰正負與矢率反蓋矢率乃心角形腰減半徑之數故也（心角形腰率正負以奇行）（積之乘數加一折半偶則仍之奇則易之）

有是數必有是形既得此半分遞加圖而兩等邊三

角之形卽可按數而定蓋根起半分則弧分亦宜折半就折半處作半徑線剖全弧爲二一端抵圜心以分心角一端抵圜界以起界角此半徑卽第一形中垂線半徑既爲中垂線必以半弧正割爲第一形腰正切爲其半底亦卽第二形腰矣第一二形腰既得迺求各形按首根半分次根一分半三根二分半各自心角作半徑界之是爲倍矢弧分首根次根併得二分次根三根併得四分三根四根併得六分各自界角作通弦界之是爲通弦弧分於是諸線相交成各三角形弦矢率遂自此出焉繪圖於左



如圖午未爲本弧心午心未皆半徑午未爲通弦成心午未兩等邊三角今應半分起度將全弧折半於界則午界未界皆半弧作心界半徑復自界點作線

與午未通弦平行引心午心未兩半徑出圜外相遇於甲於子成心甲子兩等邊三角卽第一形心界半徑爲中垂線心甲心子皆半弧正割卽第一形腰界甲界子皆正切爲其半底亦卽第二形腰半分之弧既定依遞加法進求逐分自午界半分起遞加金午木金火木等全分成金界一分半木界二分半火界三分半等弧各自心作半徑界之皆屬倍矢弧分又以午界半分乾午（卽金界）一分半併得乾界二分金界一分半坎金（卽木界）二分半併得坎界四分木界二分半艮木（卽火界）三分半併得艮界六分等弧各自界作

通弦界之皆屬通弦弧分諸線交錯遂成各兩等邊三角心角自第一心甲子形第三心乙丙形漸小至第十一心癸亥形皆對本弧界角自第二界甲乙形第四界丙丁形漸大至第十界壬癸形皆對倍弧界角對弧既得心角之倍則心角界角必各相等夫兩等邊三角一角等餘角無不等故各形皆與心午未形同式其腰底可以一率半徑二率本弧通弦相比例但以通弦用法先求得第一形腰心甲以二率午未乘之一率心午除之得甲子底折半得甲界爲第二形腰二率乘之一率除之得甲乙底以減第一形

腰心甲餘心乙爲第三形腰二率乘之一率除之得

乙丙底以加第二形腰界乙得界丙爲第四形腰二

率乘之一率除之得丙丁底以減第三形腰心丙得

心丁爲第五形腰二率乘之一率除之得丁戊底以

加第四形腰界丁得界戊爲第六形腰如是遞相加

減得各形腰底迺以第二形腰界乙第四形腰乾乙

丙卽界相併得界乾爲二分弧通弦以第四形腰界丁

第六形腰坎丁戊卽界相併得界坎爲四分弧通弦以

第一形腰較甲午第三形腰較乙午相減不用併而用減者以

第一形腰大於半徑其腰較乃半徑反減而得與

各腰較正負異名同名者宜加異名者必宜減也得

白午之倍爲半分弧倍矢白乙白甲皆半底白甲半底內減甲午腰較卽白午正矢而乙午腰較兼有白乙半底白午正矢若減甲午腰較必得白午正矢之倍也以第三形腰較丙金第五形腰較丁金相併得青金之倍爲一分半弧倍矢如是遞併得各偶分通弦及各帶半分之倍矢是比例加減與整分法悉同也惟第一形腰非半徑而用半弧正割第二形腰非通弦而用半弧正切今以一率半徑二率通弦求之必用諸率乘除加減開方之法始可得其率數算術列後

先以通弦求餘弦

本弧通弦求半弧餘弦應用勾股開方法半徑爲一

率自乘之得一率一正通弦爲二率折半爲半弧正弦自乘之得二率四之一正以減半徑自乘得一率一正二率四之一負爲實平方開之得餘弦率

開方式

實

得數

作左右兩線列實一率一正二率四之一負於右綫右二率書分子應寄四除四乃分母二自乘之數故旁記自乘開方法先以實一率一正

開方仍得一率一正爲
初得數書左線右一率之位實之一率已開過作線
抹去迺用初得數一率一正爲除法除實二率又折
半得三率八之一負八乃分母再乘數故旁記再乘
書得數三率之位實之二率已除過作綫抹去復以
得數三率自乘之得三率一正分寄五乘爲乘數書
左線左以減右實無對易爲負書右線右得數一率
除之又折半得五率一負分寄六乘書得數五率之
位減過之乘數除過之負實均作線抹去復以得數
五率三率相乘倍之得四率二正分寄九乘爲乘數

書左線左以減右實無對易爲負書右線右得數一
率除之又折半得七率二負分寄十乘書得數七率
之位減過乘數除過負實均抹去復以得數七率三
率相乘倍之得五率四正又得數五率自乘得五率
一正皆分寄十三乘並書左線左併以減右實無對
易爲負書右線右得數一率除之又折半得九率五
負分寄十四乘書得數九率之位如是按上下之位
挨次遞乘併以減實一率除之折半可得各率此數
開方不盡約開至十五率止所得之數卽餘弦率
煦案率有線與面之分式中惟得數一行各率爲

線其餘各率皆面也如云一率二率三率卽諸率自乘數乃一率二率三率之面而一率乘三率與二率自乘數同故一率除二率之面而得三率一率乘五率與三率自乘數同故一率除三率之面而得五率一率乘七率及三率乘五率與四率自乘數同故一率除三率乘五率卽如除四率之面而得七率一率乘九率及三率乘七率與五率自乘數同故三率乘七率可與五率自乘數相併一率除之而得九率餘可類推除法式倣此

次以餘弦求正割

凡以餘弦比半徑恆若半徑與正割故以半徑自乘得一率一正爲實以前所得餘弦率爲法除之得正割率卽第一形腰率

除法式

實

法

得數

作左右兩線列實於右線右列法於右線左對位書之先以法一率除實一率得數仍爲一率一正書左線右一率之位次以得數一率乘法

三率得二率一負分寄再乘書左線左以減右實無對易爲正書右線右法一率除之得數爲三率一正分寄再乘書

得數三率之位次以得數一率乘法五率得三率一負分寄六乘以得數三率乘法三率得三率一負分寄五乘較前少寄一乘迺齊其分以分母二乘分子一增爲三率二負亦寄六乘均書左線左併以減右實無對易爲正書右線右法一率除之得數爲五率

三正分寄六乘書得數五率之位次以得數一率乘
法七率得四率三負分寄十乘以得數三率乘法五
率應齊其分又以二乘之得四率二負以得數五率
乘法三率亦應齊其分以二乘之得四率六負俱分
寄十乘書左線左併以減右實無對易爲正書右線
右法一率除之得數爲七率正分寄十乘書得數七
率之位加是按位遞乘減實以法一率除得各率所
得數即第一形腰率
既得第一形腰率考其數即前遞加圖居中第一行
積二率乘之一率除之得底折半爲第二形腰率即

前遞加圖第二行積由是挨次乘除加減得各形腰率即前遞加圖逐行積今如法遞求腰底各率列式於左

遞求半分起度各形腰底率

第一形腰 心子 再 六十 十四 十八 廿二 廿六

二乘一除之得第一形底 甲子 再 六十 十四 十八 廿二 廿六

一形底折半得第二形腰 界甲 分 三 七 十一 十五 十九 廿三 廿七

二乘一除之得第二形底 甲乙 分 三 七 十一 十五 十九 廿三

一形腰減二形底得第三形腰 心乙 再 六 十 十四 十八 廿二 廿六

二乘一除之得第三形底 乙丙 再 六 十 十四 十八 廿二 廿六

二三形腰底加得第四形腰　界丙　○ 分 ○ 三 ○ 七 ○ 十一 ○ 十五 ○ 十九 ○ 廿三 ○ 廿七

二一率乘除之得第四形底　丙丁　○ ○ 分 ○ 三 ○ 七 ○ 十一 ○ 十五 ○ 十九 ○ 廿三 ○

三四形腰底減得第五形腰　心丁　| ○ 再 ○ 六 ○ 十 ○ 十四 ○ 十八 ○ 廿二 ○ 廿六 ○

二一率乘除之得第五形底　丁戊　○ | ○ 再 ○ 六 ○ 十 ○ 十四 ○ 十八 ○ 廿二 ○ 廿六

四五形腰底加得第六形腰　界戊　○ 分 ○ 三 ○ 七 ○ 十一 ○ 十五 ○ 十九 ○ 廿三 ○ 廿七

二一率乘除之得第六形底　戊己　○ ○ 分 ○ 三 ○ 七 ○ 十一 ○ 十五 ○ 十九 ○ 廿三 ○

五六形腰底減得第七形腰　心己　| ○ 再 ○ 六 ○ 十 ○ 十四 ○ 十八 ○ 廿二 ○ 廿六 ○

二一率乘除之得第七形底　己庚　○ | ○ 再 ○ 六 ○ 十 ○ 十四 ○ 十八 ○ 廿二 ○ 廿六

六七形腰底加得第八形腰　界庚　○ 分 ○ 三 ○ 七 ○ 十一 ○ 十五 ○ 十九 ○ 廿三 ○ 廿七

二一率乘除之得第八形底　庚辛　○ ○ 分 ○ 三 ○ 七 ○ 十一 ○ 十五 ○ 十九 ○ 廿三 ○

七形腰八形底減得第九形腰　心　辛　[illegible]○再[illegible]○六[illegible]○十[illegible]○十四[illegible]○十八[illegible]○廿二[illegible]○廿六[illegible]○

二率乘一率除之得第九形底　辛　壬　○[illegible]○再[illegible]○六[illegible]○十[illegible]○十四[illegible]○十八[illegible]○廿二[illegible]○廿六[illegible]

八形腰九形底加得第十形腰　界　壬　○分[illegible]○三[illegible]○七[illegible]○十一[illegible]○十五[illegible]○十九[illegible]○廿三[illegible]○廿七[illegible]

二率乘一率除之得第十形底　壬　癸　○○分[illegible]○三[illegible]○七[illegible]○十一[illegible]○十五[illegible]○十九[illegible]○廿三[illegible]○

九形腰十形底減得十一形腰　心　癸　[illegible]○再[illegible]○六[illegible]○十[illegible]○十四[illegible]○十八[illegible]○廿二[illegible]○廿六[illegible]○

二率乘一率除之得十一形底　癸　亥　○[illegible]○再[illegible]○六[illegible]○十[illegible]○十四[illegible]○十八[illegible]○廿二[illegible]○廿六[illegible]

十形腰十一形底減得十二形腰　界　亥　○分[illegible]○三[illegible]○七[illegible]○十一[illegible]○十五[illegible]○十九[illegible]○廿三[illegible]○廿七[illegible]

以上各形腰底率正負加減皆與前遞加數異而得數則同者何也蓋加減本於正負就腰底率正負論自第一形一率第二形二率第三形三率按形以次

遞降其上一正一負相間其下正則皆正負則皆負就遞加數正負論此按形遞降諸率均聯於首根首積之一線其上數皆正其下正負間行而列就應加應減論腰底率宜一加一減而得後形遞加數向左順求則用加而不用減就實加實減論此遞降之一線其上用加其下用減因在上之腰底率應加者必同名應減者必異名而遞加數則皆同名故彼此皆加也在下之腰底率應加者必異名應減者必同名而遞加數則皆異名故彼此皆減也由是觀之其正負不同應加應減亦不同而實加實減則同故得數

遂無不同兩不相謀而自然相合亦可知圜內諸形率在在一遞加數整分起度者如是半分起度者亦無不如是矣

第九形腰心辛小於第十形底壬癸故用反減所得第十一形腰底率正負宜互易以其過半周也自過半周後求界角形本宜用加易爲減求心角形本宜用減易爲加界角形率正負如前心角形率正負與前相反

既驗知半分起度腰底率與半分起根遞加數等則欲求弦矢率者但取遞加圖中各積依前法易其正

負兩行遞併併法同名加異名減併後約寄分使從簡易而弦矢率卽得矣今將界角形相等之偶行積兩行遞併其二率約二除之消其寄分餘率約四除之寄分亦消去一自乘得各偶分通弦率將心角形相等之奇行積各減半徑兩行遞併諸率皆約二除之寄分亦消去一乘得半分一分半二分半等倍矢率列式於左

求二分通弦

第二形腰界乙 ○〡○〡○[illegible]

第四形腰界乙丙卽乾 ○[illegible]

相加得界乾 ○[illegible]

約為二分通弦 ○[illegible]

求四分通弦

第四形腰界丁 ○[illegible]

分　三　七　十一　十五　十九　廿三　廿七

第六形腰戊界卯丁坎 ○[illegible]

相加得界坎 ○[illegible]

約為四分通弦 ○[illegible]

自　五　九　十三　十七　廿一　廿五

求六分通弦

第六形腰界巳 ○[illegible]

分　三　七　十一　十五　十九　廿三　廿七

第八形腰庚界卯巳艮 ○[illegible]

相加得界艮　○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

約爲六分通弦　○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]　自五九十三十七廿一廿五

求八分通弦

第八形腰界辛　○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]　分三七十一十五十九廿三廿七

第十形腰界壬即震辛　○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

相加得界震　○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

約爲八分通弦　○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]　自五九十三十七廿一廿五

求十分通弦

第十形腰界癸　○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]　分三七十一十五十九廿三廿七

第十二形腰界亥即巽癸　○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

相加得界與 ○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

約爲十分通弦 ○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]
自 五 九 十三 十七 廿一 廿五

求半分倍矢

第一形腰較甲午 ○○丨○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

第三形腰較乙午 ○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

相減得白午之倍 ○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

約爲半分倍矢 ○○丨○丨○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

求一分半倍矢

第三形腰較丙金 ○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]
再 六 十 十四 十八 廿二 廿六

第五形腰較丁金 ○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

相加得青金之倍○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

約為一分半倍矢○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]
（自五九十三十七廿一廿五）

求二分半倍矢

第五形腰較戊木○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]
（再六十十四十八廿二廿六）

第七形腰較已木○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

相加得黃木之倍○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

約為二分半倍矢○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]
（自五九十三十七廿一廿五）

求三分半倍矢

第七形腰較庚火○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]
（再六十十四十八廿二廿六）

第九形腰較辛火○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

相加得赤火之倍○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

約爲三分半倍矢○○自[illegible]○五[illegible]○九[illegible]○十三[illegible]○十七[illegible]○廿一[illegible]○廿五[illegible]

求四分半倍矢

第九形腰較壬水○○再[illegible]○六[illegible]○十[illegible]○十四[illegible]○十八[illegible]○廿二[illegible]○廿六[illegible]

第十一形腰較癸水○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

相加得心水之倍○○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]○[illegible]

約爲四分半倍矢○○自[illegible]○五[illegible]○九[illegible]○十三[illegible]○十七[illegible]○廿一[illegible]○廿五[illegible]

論以根求積法

此遞加數雖起自半分而以根求積法與整分同如前所衍諸積皆遞加遞減而得而求各首積則用遞

乘遞除法即求諸積亦可用遞乘遞除法今試寄其除法以便逐位相校而知乘除所得與加減所得其數固無不等

求逐位平積依遞加法應以寄除二乘次根加首平積得次位平積而首位平積本即首根乘次根數（寄二除下同）既同用次根一以二乘一以首根乘則先加後乘得數亦等故以二加首根易爲第三根轉乘次根而得次位平積又以寄除二乘第三根加次位平積得三位平積而次位平積本即次根乘第三根數既同用第三根一以二乘一以次根乘則先加後乘得

數亦等故以二加次根易爲第四根轉乘第三根而得三位平積依遞減法應以寄除二乘首根減首位平積得首位外平積而首位平積本即次根乘首根數既同用首根一以二乘一以次根乘則先減後乘得數亦等故以二減次根易爲首負根轉乘首根而得首位外平積負又以寄除二乘首負根減首位外平積得次位外平積而首位外平積本即首根乘首負根數既同用首負根一以二乘一以首根乘則先減後乘得數亦等故以二減首根得次負根轉乘次負根得次位外平積正準是推之根層遞取兩數相

乘二除之可得逐位平積

求逐位立積依遞加法應以寄除三乘次位平積加首位立積得次位立積而首位立積本即首根次根三根遞乘數（寄二除三除下同）次位平積又即次根三根相乘數（寄二除下同）既同用次根三根一以三增乘一以首根增乘則先加後乘得數亦等故以三加首根易為第四根遞乘次根三根而得次位立積又以寄除三乘三位平積加次位立積得三位立積而次位立積本即次根三根四根遞乘數三位平積又即三根四根相乘數既同用三根四根一以三增乘一以次根

增乘則先加後乘得數亦等故以三加次根易爲第五根遞乘三根四根而得三位立積依遞減法應以寄除三乘首位平積減首位立積得首位外立積而首位立積本即首根次根三根遞乘數首位平積又即首根次根相乘數既同用首根次根一以三增乘一以三根增乘則先減後乘得數亦等故以三減第三根易爲首負根與首根次根遞乘而得首位外立積又以寄除三乘首位外平積減首位外立積得次位外立積而首位外立積本即首負根首根次根遞乘數首位外平積又即首負根首根相乘數既同用

首負根首根一以三增乘一以次根增乘則先減後乘得數亦等故以三減次根易爲次負根與首負根首根遞乘而得次位外立積準是推之根層遞取三數相乘二三遞除之可得逐位立積三乘積以下均可類推每增一數乘卽增一數除所得者卽增一乘之積與整分法悉同特整分求積其積有盡半分求積其積無窮以其有負根因有負積故也今約分六術以覈之

求自根斜左一行積

立奇數爲倍根二除之爲根數倍根加二以乘根二

除之二除之爲平積倍根加四以乘平積二除之三除之爲立積倍根加六以乘立積二除之四除之爲三乘積倍根加八以乘三乘積二除之五除之爲四乘積加如是遞求得各乘積皆正若用負根遞次乘法易加爲減減數大倍根小減得正乘法減數小倍根大減得負乘法視乘法正負與所乘根積同名者得積爲正異名者得積爲負

斜左一行積在整分爲三角堆半分者不可以堆名諸根既各帶半分倍之則各得奇數故用奇數爲倍根根既倍則遞加之一二三四等數亦宜倍故易爲二四六八而乘法皆倍乘後亦宜各增二

除也又二四六八等遞加數恆為正正根與之同名故用加負根與之異名故以減為加

求自根斜右一行積

立奇數為倍根二除之為根數倍根減二以乘根二除之二除之為平積倍根減四以乘平積二除之三除之為立積倍根減六以乘立積二除之四除之為三乘積倍根減八以乘三乘積二除之五除之為四乘積如是遞求得各乘積凡乘法減數小倍根大減得正乘法減數大倍根小減得負乘法視乘法正負與所乘根積同名者得積為正異名者得積為負若用

負根遞次乘法易減為加皆負定積正負法與上同

斜右一行積在整分為廉率半分者不可以廉名積既斜右乘法宜遞取根右數故用減減數自小而大愈大則反減故乘法先正後負若負根與減數異名故以加為減而乘法常負

求偶行直下積即界角形腰率

立奇數為倍根即形數減一二除之為根數即二率倍根加二減二相乘倍根自乘減四其數亦同以乘根四除之二除之三除之為立積即四率倍根加四減四相乘倍根自乘減十六其數亦同以乘立積四除之四除之五除之為四乘積即六率

倍根加六減六相乘倍根自乘減三十六其數亦同以乘四乘積四除之六除之七除之為六乘積率即八如是遞求得各乘積凡乘法倍根大加減數小則兩數同名乘得正乘法倍根小加減數大則兩數異名乘得負乘法又倍根自乘內減減數者為正乘法減數內減倍根自乘者為負乘法若求腰率則正負互易視乘法正負與所乘根積同名者得積為正異名者得積為負

根皆帶半故用倍與斜行同其遞取兩數乘除及易用和方減較方之故均詳整分法中不煩贅論

求奇行直下積即心角形腰較率

立偶數爲倍根卽形數減一倍根加一減一相乘倍根自乘減一其數亦同四除之二除之爲平積卽三率倍根加三減三相乘倍根自乘減九其數亦同以乘平積四除之三除之四除之爲三乘積卽五率倍根加五減五相乘倍根自乘減二十五其數亦同以乘三乘積四除之五除之六除之爲五乘積卽七率倍根加七減七相乘倍根自乘減四十九其數亦同以乘五乘積四除之七除之八除之爲七乘積卽九率如是遞求得各乘積凡定乘法正負及各積正負與偶行同

偶行數起根層故整分者用本根半分者用倍根

奇行根層無數其根藏兩數閒故整分者左右數

雖整而根各帶半半分者根雖整而左右數各帶半帶半則零故皆用倍根

求兩偶行併積卽通弦率

立偶數爲倍根卽弧分卽爲併根卽二率倍根加一減一相乘卽弧分自乘減一以乘併根四除之二三遞除之爲併立積卽四率倍根加三減三相乘卽弧分自乘減九以乘併立積四除之四五遞除之爲併四乘積卽六率倍根加五減五相乘卽弧分自乘減二十五以乘併四乘積四除之六七遞除之爲併六乘積卽八率如是遞求得各乘積凡乘法倍根大加減數小則兩數同名乘得正乘法倍根

小加減數大則兩數異名乘得負乘法若求通弦則弧分小減數大爲正乘法弧分大減數小爲負乘法與併積相反視乘法正負與所乘根積同名者得積爲正異名者得積爲負

併積亦有根偶行併積之根在根層兩數閒而適當奇行故與求奇行直下積乘法相同除法差一數所得積亦差一乘又遞加求積法根與加減數皆爲正惟取根左數應加取根右數應減故減數小仍爲正減數大易爲負求腰底弦矢率加減數亦爲正惟加則根爲正減則根爲負故減數小仍爲負減數大易爲正由是而兩者之乘法正負相

反積之與率亦一異一同相閒矣

求兩奇行併積即倍矢率

立奇數爲倍根即倍弧分自乘之四除之爲併平積即三率倍根加二減二相乘即倍弧分自乘減四以乘併平積四除之三四遞除之爲併三乘積即五率倍根加四減四相乘即倍弧分自乘減十六以乘併三乘積四除之五六遞除之爲併五乘積即七率倍根加六減六相乘即倍弧分自乘減三十六以乘併五乘積四除之七八遞除之爲併七乘積即九率如是遞求得各併積凡定乘法正負及各積正負與併偶行同求倍矢乘法亦與併積相反

奇行根屬無數併積之根適當偶行故與求偶行直下積乘法相同除法差一數所得積亦差一乘又求矢術遞次本無四除此則增四除而與通弦同法法雖同意則有異通弦固用倍根增四除而倍根即弧分倍矢亦因用倍根增四除而倍根非弧分乃弧之分子其分母則爲二以四除者實以分母自乘除也故遞次之四除通弦其常而倍矢其偶

仁和高雲麟同
淅陽趙元益